TITLE:

安定性予想に対するClosing Lemmaの応用について (力学系における非線形回路の諸問題)

AUTHOR(S):

三波, 篤郎

CITATION:

三波, 篤郎. 安定性予想に対するClosing Lemmaの応用について (力学系における非線形回路の諸問題). 数理解析研究所講究録 1979, 370: 78-87

ISSUE DATE:

1979-12

URL:

http://hdl.handle.net/2433/104672

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅 Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
370巻 1979年 78-87

安定性予想に対する Closing Lemma の応用について

北大 理学部 三波 篤郎

§1 . 力学系の理論における基本的な問題の1つは、stableなsystemを characterize する事である。

これについて、S. Smale, J. Palis は次の事を予想した。

Conjecture (S. Smale, J. Palis [5])

構造安定 $\Longleftrightarrow$ Axiom A + Strong Transversality condition

Conjecture (S. Smale [6])

Ω-安定 $\Longleftrightarrow$ Axiom A + No Cycle property

これらの予想は、vector field, diffeomorphism の双方に対して意味を持っているが、ここでは、有限次元、closed、可微分多様体 M 上の diffeomorphism についてのみ考える。

多くの部分的結果が提出され、結局、C^1-stability の場合、次の予想が証明されれば、上の2つの予想は最終的に解決される事がわかっている。(なお、詳しくは、R. Mañé [2] 参照)

Conjecture

$f \in \mathcal{F}(M)$（Ω-安定 or 構造安定）

$\underset{?}{\Longrightarrow}$ $\Lambda_i(f)$: hyperbolic set　$(0 \leq {}^\forall i \leq \dim M)$

ここで．

$\mathcal{F}(M) = \mathrm{int}_1 \{ f \in \mathrm{Diff}^1(M) \mid f$ の周期点は hyperbolic $\}$

また，$\mathcal{F}(M) \ni f$ について．

$\Lambda_i(f) = cl \{ p \in \mathrm{Per}(f) \mid p$ の stable dimension $= i \}$

さて．この問題を扱う上で．R. Mañé の次の結果が重要である．

(1.1) Proposition（R. Mañé [1]）

$f \in \mathcal{F}(M)$ について次の事が成立する．

(i) f のある近傍 $\mathcal{U}$，${}^\exists c_1 > 0$，$0 < {}^\exists \lambda_1 < 1$

が存在し，${}^\forall g \in \mathcal{U}$ について．

$$\| Tg^{\pi(x,g)} \mid E^s_x(g) \| \leq c_1 \lambda_1^{\pi(x,g)}$$

$$\| Tg^{-\pi(x,g)} \mid E^u_x(g) \| \leq c_1 \lambda_1^{\pi(x,g)} \qquad {}^\forall x \in \mathrm{Per}(g)$$

ここで．$\pi(x,g)$ は x の g に対する周期．また．

$E^s_x(g)$（$E^u_x(g)$）は．g の x における stable

(unstable) sub space．

(ii) $0 < {}^\forall j < \dim M$ について．ある Tf-invariant な

$TM \mid \Lambda_j$ の subbundle E^s_j，E^u_j 及び．

${}^\exists c_2 > 0$，$0 < {}^\exists \lambda_2 < 1$ が存在し．

$$TM \mid \Lambda_j = E^s_j \oplus E^u_j$$

$$\| Tf^n \mid E_{jx}^s \| \cdot \| Tf^{-n} \mid E_{j\,f^n(x)}^u \| \leqq C_2 \lambda_2^n$$
$$\forall x \in \Lambda_j, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad \lrcorner$$

この結果から、Λ_j が hyperbolic set になるなら、それに対応する $TM|\Lambda_j$ の splitting は E_j^s, E_j^u でなければならない事がわかる。この事から C^1－安定性予想を解決するための、最終的な目標は、構造安定、Ω－安定、あるいは、$\mathcal{F}(M)$ の f について、$Tf^n | E_j^s$, $Tf^{-n} | E_j^u$ が、$n \to \infty$ の時、exponential な contraction となる事を示す事である。

さて、この問題に関して、Closing Lemma の方法が有効であろうと考えられるのは、次のような理由による。

$Tf^n | E_j^s$, $Tf^{-n} | E_j^u$ が exponential contraction でないと仮定した時、f が構造安定，Ω－安定、あるいは、$\mathcal{F}(M)$ である事に矛盾する事を示せばよいのだが、わずかな perturbation に対して、それがもとの f と（又は、$f|\Omega(f)$ と）位相共役になるかどうかの判定は、非常に困難であるように思われる。そこで、実際上、使いやすい条件は $\mathcal{F}(M)$ にならざるを得ない。$Tf^{-n} | E_j^u$ が contraction でないと仮定すると、次の事がわかる。

<u>（1、2）</u>　$^\exists p_*$: 回帰点，$^\exists v \in E_{j\,p_*}^u$, $\|v\| = 1$ が存在し、$\|Tf^n v\| \leqq 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$. $\lrcorner$

つまり、unstable subspace の element でありながら、

正の iteration に対して，norm が増大しないものが存在するのである。 そこでもし，この回帰点をわずかな perturbation によって，周期点にできれば，(1.1) (i) に矛盾するような周期点を作れるであろう，というわけである。 しかし，一般には，そう簡単にはゆかない。 その理由は，(closing Lemma の方法で) 閉じて，周期軌道にできるような orbit (の一部) の各点相互の位置関係の条件と，そこにおける norm の変化を，うまく同調させる事が，今のところできていないからである。 しかし，ある種の条件の下では可能である。 ここでの目的は，そのような 2つの case を述べる事である。

$f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ ，$M \supset \Lambda$: compact f-invariant sub set

$TM|\Lambda \supset E$: Tf-invariant subbundle とした時，

$\Gamma^b(E) = \{ E$ の bounded section 全体 $\}$

$\Gamma^c(E) = \{ E$ の continuous section 全体 $\}$

とすると，これらは sup. norm で Banach space になる。

$\Gamma = \Gamma^b$ or Γ^c とした時，$f_* : \Gamma \longrightarrow \Gamma$ を，

$f_*(\sigma) = Tf \circ \sigma \circ f^{-1}$ ときめると，

f_* は，isomorphism (linear homeomorphism) となる。

次の 2つの定理が，ここでの主要結果である。

Theorem 1　$f \in \mathcal{F}(M)$ について，

(i) $\displaystyle\sup_{x \in \Lambda_j,\, n \in \mathbb{Z}_+} \| Tf^n | E^s_{jx} \| < \infty$

$\Longrightarrow$ spectral radius of $f_* | \Gamma^b(E^s_j) < 1$

(ii) $\displaystyle\sup_{x \in \Lambda_j,\, n \in \mathbb{Z}_+} \| Tf^{-n} | E^u_{jx} \| < \infty$

$\Longrightarrow$ spectral radius of $f_*^{-1} | \Gamma^b(E^u_j) < 1$

Theorem 2　f : C^1-構造安定，$\Lambda_i(f) \cap \Lambda_j(f) = \phi \ (i \neq j)$

λ_1 を (1.1) Prop. (i) の定数とする．

ある $\lambda \in \mathbb{C}$ s.t. $\lambda_1 < |\lambda| \leq 1$ が，

(i) $f_* | \Gamma^b(E^s_j)$ のスペクトルでない

$\Longrightarrow$ spec. rad. $f_* | \Gamma^b(E^s_j) < 1$

(ii) $f_*^{-1} | \Gamma^b(E^u_j)$ のスペクトルでない

$\Longrightarrow$ spec. rad $f_*^{-1} | \Gamma^b(E^u_j) < 1$.

これらの結果を，安定性予想との関係がはっきりするように言いかえると，次のようになる．

Corollary 1　$f \in \mathcal{F}(M)$ について．

$\Lambda_j(f)$ が hyperbolic set

$$\Longleftrightarrow \sup_{x \in \Lambda_j,\, n \in \mathbb{Z}_+} \{ \| Tf^n | E^s_{jx} \|, \| Tf^{-n} | E^u_{jx} \| \} < \infty$$

Corollary 2

C^1-構造安定 かつ. $\Lambda_i \cap \Lambda_j = \phi$ $(i \neq j)$ となる $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ について.

$\Lambda_j(f)$ が hyperbolic set

$\Longleftrightarrow$ $\exists \lambda_s, \exists \lambda_u \in \mathbb{C}$ s.t. $\lambda_1 < |\lambda_s| \leq 1 \leq |\lambda_u| < \lambda_1^{-1}$ が存在し. λ_s (λ_u) は $f_* | \Gamma^b(E_j^s)$ $\left(f_*^{-1} | \Gamma^b(E_j^u)\right)$ のスペクトルではない.

これらの結果の証明のポイントは. 与えられた条件によって. norm の変化を一様に規定でき. Closing Lemma の方法が. 割合. 容易に適用できるという点にある.

具体的には. 次の形で使われる.

Lemma 1

$f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, p_* : f の回帰点, $\Lambda = cl\{Orb_+(p_*)\}$

$TM|\Lambda = E^1 \oplus E^2$: Tf-invariant splitting

$\mathcal{U}$: f の nbd.

この時. $\forall \varepsilon > 0$ に対して.

$\exists k_1 < \exists k_2$ (正整数), $\exists g \in \mathcal{U}$

$\exists G : T_q M \longrightarrow T_p M$: isomorphism

ただし $p = f^{k_1}(p_*)$, $q = f^{k_2}(p_*)$

が存在し. 次をみたす.

(i) $d(p_*, p) < \varepsilon$, $d(p_*, q) < \varepsilon$

(ii) $g^{k_2-k_1}(q) = q$, $g^k(q) \neq q$ $(0 < {}^\forall k < k_2-k_1)$

(iii) $G(E_q^i) = E_p^i$ $(i=1,2)$ であり

$G \mid E_q^i : E_q^i \longrightarrow E_p^i$ は isometry

(iv) $T_p f^{k_2-k_1} \circ G = T_q g^{k_2-k_1}$

(v) gf^{-1} の support は $\bigcup_{k=k_1}^{k_2} f^k(p_*)$ の ε-nbd

に含まれる. 」

(証明は Sannami [4] 参照.)

§. 2 定理の証明.

Theorem 1 の証明は. Sannami [4] 参照.

ここでは. Theorem 2 の証明の概略を述べる.

$\lambda_1 < |\overset{\exists}{\lambda}| \leq 1$ が $f_*^{-1} \mid \Gamma^b(E_j^u)$ のスペクトルでない

なら. spec. rad $f_*^{-1} \mid \Gamma^b(E_j^u) < 1$ を示す.

E^s についても. 同様である.

さて. $\sigma(L)$ = L のスペクトル集合 とすると.

$\sigma(f_*^{-1} \mid \Gamma^c(E_j^u)) \subset \sigma(f_*^{-1} \mid \Gamma^b(E_j^u))$

であるから. $\lambda \notin \sigma(f_*^{-1} \mid \Gamma^c(E_j^u))$ である.

J. Mather [3] の証明中の結果から.

$S_\lambda = \{\mu \in \mathbb{C} \mid |\mu| = |\lambda|\}$ とすると.

$S_\lambda \cap \sigma(f_*^{-1} | \Gamma^c(E_j^u)) = \phi$ である事がわかる。
これは、$f_*^{-1} : \Gamma^c(E_j^u)$ ② が、λ-pseudo-hyperbolic
であるという事である。従って、f_*^{-1}-invariant splitting

$$\Gamma^c(E_j^u) = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$$ が存在し、

(2.1) $\quad$ spec. rad $f_*^{-1} | \Gamma_1 < |\lambda|$

$\qquad\qquad$ spec rad $f_* | \Gamma_2 < |\lambda|^{-1}$

さらに、

E_j^u の Tf-invariant subbundle E_1, E_2 があり、

$E_j^u = E_1 \oplus E_2$, $\qquad \Gamma_i = \Gamma^c(E_i) \quad (i = 1, 2)$

となる事がわかる。

さて、spec. rad $f_*^{-1} | \Gamma^c(E_j^u) \geq 1$ と仮定すると、
(2.1) より、E_2 は、0-vector bdl ではない。
そこで、(1.2) を示したのと同様の議論を $Tf | E_2$ に
適用すると、ある回帰点 p_* と、$E_2 \ni {}^\exists v$, $\|v\| = 1$ で、

$\|Tf^n v\| \leq 1 \quad {}^\forall n \in \mathbb{Z}_+$ となるものがある。

spec. rad $f_* | \Gamma_2 < |\lambda|^{-1} < \lambda_1^{-1}$ であるから、
$\exists\, n_0 \in \mathbb{Z}_+$ が存在し、

$$n > n_0 \implies \| f_*^n | \Gamma_2 \|^{1/n} < |\lambda|^{-1}$$

この事から、$n > n_0$ なら、${}^\forall x \in \Lambda_j$ について、

$\| Tf^n | E_{2x} \| < |\lambda|^{-n}$ となる事がわかる。

上に述べたように、その上では、E_2 が 0 にならないよう

な．回帰点p_*の存在が保障されているから．これにLemma 1を適用して．fのperturbation gを作るのであるが．ここでLemma 1におけるk_2-k_1を十分大きくとると．作り出した周期点qについて．(1.1) Prop. (i)にあるように．

$$\| Tg^{-\pi(g.q)} \mid E^u_q(g) \| \leq C_1 \lambda_1^{\pi(g.q)}$$

となるためには．stable dimensionが必ず増大していなければならない事がわかる．ところが．perturbationのsupportは十分小さくでき．$\Lambda_i \cap \Lambda_j = \phi \quad (i \neq j)$であるから．$g = f$ on $\Lambda_i \quad (i \neq j)$である．$f$は構造安定であるから．$g(\Lambda_i) = \Lambda_i \quad (i \neq j)$とならなければならない．故に．上で作った周期点$q$のstable dimensionは．もとの$j$でなければならない．

これは矛盾である．従って．

$$\text{spec. rad } f_*^{-1} \mid \Gamma^c(E_j^u) < 1 \quad \text{となる．}$$

この事から．

$$\text{spec. rad } f_*^{-1} \mid \Gamma^b(E_j^u) < 1 \quad \text{がわかる．}$$

Q.E.D.

[REFERENCES]

[0] C. Pugh , R.C. Robinson
C^1 Closing Lemma, including Hamiltonians.
(Preprint)

[1] R. Mañé Expansive diffeomorphisms.
LNM 468 (1974) 162 – 174

[2] R. Mañé Contributions to the Stability Conjecture.
Topology (1979)

[3] J. Mather Characterization of Anosov diffeo.
Indag. Math. 30 (1968) 479 – 483

[4]. A. Sannami On the Stability Conjecture.
Master thesis. (1979) Hokkaido Univ.

[5]. J. Palis , S. Smale. Structural Stability theorem.
Global Analysis 223 – 232

[6]. S. Smale
Global stability questions in dynamical systems.
symposium on Global Analysis, Washington, D.C.